$\boxed{1}$

(1)

与式を α について整理し，因数分解を行うと，

$$\begin{aligned}\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1&=\alpha(\beta\gamma+\beta+\gamma+1)+\beta\gamma+\beta+\gamma+1\\&=(\alpha+1)(\beta\gamma+\beta+\gamma+1)\\&=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)\end{aligned}$$

(2)

解と係数の関係より，

$\alpha+\beta+\gamma=-p$
$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=q$
$\alpha\beta\gamma=29+p-q$

よって，

$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1=29+p-q+q-p+1=30$

$\alpha\beta\gamma+\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha+\alpha+\beta+\gamma+1=(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)$ より，

$(\alpha+1)(\beta+1)(\gamma+1)=30$

$\alpha<\beta<\gamma$ （α,β,γ は自然数）だから，

$\alpha+1=2$， $\beta+1=3$， $\gamma+1=5$

よって，

$\alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=4$

また，

$\alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=4$ とすると，

$p=-(\alpha+\beta+\gamma)=-7$
$q=\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=14$

$\alpha\beta\gamma=8$
$29+p-q=8$

より，

$\alpha\beta\gamma=29+p-q$

となるので，

p,q は整数かつ解と係数の関係が成り立つので条件を満たす。

ゆえに，

$\alpha=1,\quad \beta=2,\quad \gamma=4$

$\boxed{2}$

(1)

$\angle \mathrm{ABD}=\theta \quad (0<\theta<\pi)$ とおくと,

$$
\begin{aligned}
\Delta \mathrm{ABD} &= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\sin\theta \\
&= \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|\sqrt{1-\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2-\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2\cos^2\theta} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)^2} \\
&= \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{p}|^2|\vec{q}|^2-(\vec{p}\cdot\vec{q})^2}
\end{aligned}
$$

(2)

点 C が 3 点 A，B，D で定まる平面上の点ならば,

$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を満たす実数 s,t が存在する。

$$
\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\1\\-6\end{pmatrix}
$$

$$
\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\begin{pmatrix}-1\\2\\-5\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-6\end{pmatrix}
$$

$$
\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\begin{pmatrix}-3\\0\\-3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}
$$

より,

$$
\begin{pmatrix}-4\\1\\-6\end{pmatrix}=s\begin{pmatrix}-2\\2\\-6\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}
$$

よって,

$$
\begin{cases}-4=-2s-4t\\1=2s\\-6=-6s-4t\end{cases}
$$

これを解くと， $s=\frac{1}{2}, t=\frac{3}{4}$

よって，点 C は，3 点 A，B，D で定まる平面上にある。

(3)

(2)より，

$\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{4}\overrightarrow{AD}=\frac{5}{4}\left(\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}\right)$

$\overrightarrow{AE}=\frac{2}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ とおくと，点 E は線分 BD を 2：3 に内分する点であり，

これと $\overrightarrow{AC}=\frac{5}{4}\overrightarrow{AE}$ より，AE：EC＝4：1

よって，

四角形 ABCD の面積＝△ABD の面積＋△CBD の面積

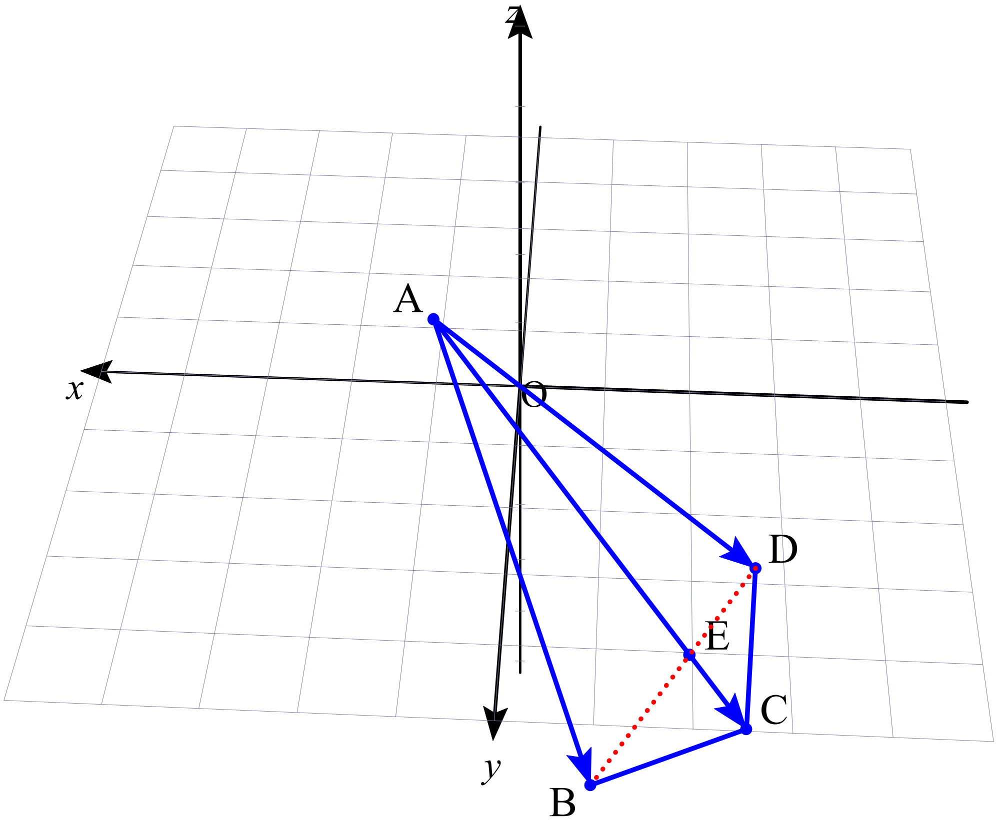
＝△ABD の面積＋△ABD の面積× $\frac{1}{4}$

＝△ABD の面積× $\frac{5}{4}$

△ABD の面積は，(1)より，$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2}$ であり，

これと $\overrightarrow{AB}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-6\end{pmatrix}$，$\overrightarrow{AD}=\begin{pmatrix}-4\\0\\-4\end{pmatrix}$ から，$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{AB}\right|^2\left|\overrightarrow{AD}\right|^2-\left(\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2}=\frac{\sqrt{44\cdot32-32^2}}{2}=4\sqrt{6}$

よって，四角形 ABCD の面積＝ $4\sqrt{6}\times\frac{5}{4}=5\sqrt{6}$


z
x
O
y
A
B
C
D
E

$\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
f(x) &= (\sin x)^2 + (\sin 2x)^2 \\
&= \sin^2 x + 4\sin^2 x\cos^2 x \\
&= \sin^2 x + 4\sin^2 x(1-\sin^2 x) \\
&= -4\sin^4 x + 5\sin^2 x
\end{aligned}
$$

よって，

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= -16\cos x\sin^3 x + 10\cos x\sin x \\
&= -\sin x\cos x(16\sin^2 x - 10) \\
&= -\sin 2x(8\sin^2 x - 5)
\end{aligned}
$$

ここで，$\sin^2 x = \frac{5}{8}$ を満たす x を $\alpha, \beta\ (0<\alpha<\beta<\pi)$ とおくと，$\sin\alpha = \sin\beta = \sqrt{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt{10}}{4}$

したがって，$f'(x)=0\ (0<x<\pi)$ となる x は $x=\alpha, \frac{\pi}{2}, \beta$ であり，大小関係は $\alpha < \frac{\pi}{2} < \beta$

また，$\alpha < x < \beta$ のとき $\sin^2 x > \frac{5}{8}$ より，$8\sin^2 x - 5 > 0$

$0<x<\alpha$ または $\beta < x < \pi$ のとき $\sin^2 x < \frac{5}{8}$ より，$8\sin^2 x - 5 < 0$

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin 2x > 0$，$\frac{\pi}{2} < x < \pi$ のとき $\sin 2x < 0$

よって，

$0<x<\alpha$ および $\frac{\pi}{2} < x < \beta$ のとき $f'(x) > 0$

$\alpha < x < \frac{\pi}{2}$ および $\beta < x < \pi$ のとき $f'(x) < 0$

よって，増減表は次のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\uparrow$	極大	$\downarrow$	極小	$\uparrow$	極大	$\downarrow$	

ただし，$f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \sin^2\frac{\pi}{2} + \sin^2\left(2\times\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$f(\alpha) = -4\sin^4\alpha + 5\sin^2\alpha = -4\cdot\left(\frac{5}{8}\right)^2 + 5\cdot\frac{5}{8} = \frac{25}{16}$，同様に $f(\beta) = \frac{25}{16}$

ゆえに，極大値は $\frac{25}{16}$（$\sin x = \frac{\sqrt{10}}{4}$ のとき），極小値は 1（$x = \frac{\pi}{2}$ のとき）

$\boxed{4}$

(1)

解法 **1**：間接証明（数学的帰納法による証明）

（ｉ）

$n=1$ のとき

与式の左辺 $=\dfrac{1}{t(1+t)}$

与式の右辺 $=\dfrac{1}{t}+\dfrac{-1}{1+t}=\dfrac{1}{t(1+t)}$

よって，与式が成り立つ。

（ⅱ）

$n=m$ のとき与式が成り立つと仮定すると，$\dfrac{1}{t(1+t)^m}=\dfrac{1}{t}+\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\dfrac{-1}{(1+t)^k}$

この両辺に $\dfrac{1}{1+t}$ をかけると

$$\frac{1}{t(1+t)^{m+1}}=\frac{1}{1+t}\left\{\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{m}\frac{-1}{(1+t)^k}\right\}$$

$$=\frac{1}{t(1+t)}+\frac{1}{1+t}\sum_{k=1}^{m}\frac{-1}{(1+t)^k}$$

$$=\frac{1}{t}+\frac{-1}{1+t}+\sum_{k=1}^{m}\frac{-1}{(1+t)^{k+1}}$$

$$=\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{m+1}\frac{-1}{(1+t)^k}$$

これは，$n=m+1$ のときも与式が成り立つことを示している。

よって，（ｉ），（ⅱ）より，自然数 n に対して与式が成り立つ。

解法 **2**：直接証明（等比数列の和）

$$
\begin{aligned}
\text{与式の右辺} &= \frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{(1+t)^k} \\
&= \frac{1}{t}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+t)^k} \\
&= \frac{1}{t}-\frac{\frac{1}{1+t}\left\{1-\left(\frac{1}{1+t}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{1+t}} \\
&= \frac{1}{t}-\frac{\frac{1}{1+t}\left\{1-\left(\frac{1}{1+t}\right)^n\right\}}{1-\frac{1}{1+t}}\times\frac{1+t}{1+t} \\
&= \frac{1}{t}-\frac{1-\left(\frac{1}{1+t}\right)^n}{t} \\
&= \frac{1}{t}-\frac{1}{t}+\frac{1}{t}\left(\frac{1}{1+t}\right)^n \\
&= \frac{1}{t(1+t)^n} \\
&= \text{与式の左辺}
\end{aligned}
$$

よって，自然数 n に対して与式が成り立つ。

(2)

$e^x=t$ とおくと，$e^x=\dfrac{dt}{dx}$ より，$dx=\dfrac{dt}{e^x}=\dfrac{dt}{t}$

よって，

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{(1+e^x)^n}dx &= \int\frac{1}{(1+t)^{nt}}\cdot\frac{dt}{t} \\
&= \int\frac{1}{t(1+t)^n}dt
\end{aligned}
$$

これと，(1)の等式より，

$$
\begin{aligned}
\int\frac{1}{(1+e^x)^n}dx &= \int\frac{1}{t(1+t)^n}dt \\
&= \int\left\{\frac{1}{t}+\sum_{k=1}^{n}\frac{-1}{(1+t)^k}\right\}dt \\
&= \int\frac{1}{t}dt-\int\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+t)^k}dt
\end{aligned}
$$

ここで，

$n=1$ のとき

C_1 を積分定数とすると，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t}dt-\int \frac{1}{1+t}dt &= \log|t|-\log|1+t|+C_1\\ &= \log e^x-\log(1+e^x)+C_1\\ &= x-\log(1+e^x)+C_1\end{aligned}$$

$n \geq 2$ のとき

C_2 を積分定数とすると，

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{t}dt-\int \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(1+t)^k}dt &= \int \frac{1}{t}dt-\int\left\{\frac{1}{1+t}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(1+t)^k}\right\}dt\\ &= \int \frac{1}{t}dt-\int \frac{1}{1+t}dt-\int \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{(1+t)^k}dt\\ &= \log|t|-\log|1+t|-\int\left\{\frac{1}{(1+t)^2}+\frac{1}{(1+t)^3}+\cdots+\frac{1}{(1+t)^n}\right\}dt\\ &= \log|t|-\log|1+t|-\left\{\int \frac{1}{(1+t)^2}dt+\int \frac{1}{(1+t)^3}dt+\cdots+\int \frac{1}{(1+t)^n}dt\right\}\\ &= \log|t|-\log|1+t|-\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\int (1+t)^{-k-1}dt\right\}\\ &= \log|t|-\log|1+t|-\sum_{k=1}^{n-1}-\frac{1}{k}(1+t)^{-k}+C_2\\ &= \log e^x-\log(1+e^x)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+e^x)^k}+C_2\end{aligned}$$

以上より，

$n=1$ のとき，$\displaystyle\int \frac{1}{1+e^x}dx = x-\log(1+e^x)+C_1$　（C_1 は積分定数）

$n \geq 2$ のとき，$\displaystyle\int \frac{1}{(1+e^x)^n}dx = x-\log(1+e^x)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k(1+e^x)^k}+C_2$　（C_2 は積分定数）